BLOQUE II: ÁLGEBRA LINEAL.

TEMA 5

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS VECTORIALES

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1 Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (4, -1, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -3)$, expresar, si se puede, los siguientes vectores como combinación lineal de ellos.

a) $\vec{w} = (14, 1, -9)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 14 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

det(A)= 0 ⇒Son Linealmente Dependientes ⇒El tercer vector se puede escribir como combinación lineal de los dos primeros:

$4a + 2b = 14$
$-a + b = 1$; b= 3 a= 2 $\Rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$
$-3b = -9$

b) $\vec{w} = (0, 3, -6)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

det(A)= 0 ⇒ Son LD

Escribimos el tercer vector como combinación lineal de los dos primeros:

$4a + 2b = 0$
$-a + b = 3$; b= 2 a= -1 $\Rightarrow \vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$
$-3b = -6$

c) $\vec{w} = (10, -1, 5)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

det(A)= 48≠0 ⇒Son Linealmente Independientes ⇒Ninguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros

Ejercicio 2 Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$.

a) $\{(1, 2, -4, 0), (-2, 4, -8, 0), (2, 3, 0, 1)\}$

Solución:

$$rgA = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Son LI}$$

b) $\{(1, 2, -4, 0), (2, 4, 8, 0), (4, 8, 8, 0)\}$

Solución:

$$rgA = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{Son Linealmente Dependientes}, \Rightarrow \vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

c) $\{(2,0,3,0),(0,1,-3,0),(1,-2,0,8)\}$

Solución:

$$rgA = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Son LI}$$

Ejercicio 3 Dado el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \quad / \quad \begin{array}{r} x-2y+t=0 \\ 3x+5y+z-t=0 \\ 5x+y+3z+t=0 \end{array} \right\}$$

Determinar:

a) *Dim (S)*

Solución:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{Las ecuaciones no son redundantes} \Rightarrow \text{Dim(S)} = 4-3 = 1$$

b) Las ecuaciones cartesianas del subespacio

Solución:

Son las del enunciado

c) Una base del subespacio

Solución:

Basta encontrar un vector, solucionando el sistema;

(x= -3/11 t, y= 4/11 t, z= 0, t= t)

Para t= 1 tenemos (-3/11, 4/11, 0, 1)

d) Las ecuaciones paramétricas del subespacio

Solución:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{3}{11}\lambda \\ y &= \frac{4}{11}\lambda \\ z &= 0 \\ t &= \lambda \end{aligned}$$

Ejercicio 4 Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores,

$$S = L\{(1,2,-4,1),(2,4,-8,2),(2,3,1,1)\}$$

Determinar:

a) *Dim (S)*

Solución:

$$rgA = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{Dim(S)} = 2$$

b) Una base del subespacio

Solución:

Basta escoger dos vectores LI, por ejemplo; (1, 2, -4, 1) y (2, 3, 1, 1)

c) Las ecuaciones cartesianas del subespacio

Solución:

Necesitamos 4-dim(S)= 2 ecuaciones no redundantes

$$rg\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & -4 & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \;\Rightarrow$$

$$det\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z & -4 & 1 \end{pmatrix} = 0;\ 14x - 9y - z = 0$$

$$det\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0;\ -x + y - t = 0$$

Ejercicio 5 Determinar si los siguientes vectores son sistema generador y/o base de $I\!R^3$

a) $\{(3,-1,-1),(1,0,-2),(0,4,3),(2,-1,1)\}$

Solución:

$$rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La cuarta columna es combinación de las dos primeras, se obtiene restando las dos primeras

Las tres primeras columnas son independientes, $det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 23$

Los vectores por tanto son sistema generador pero no base, la base está formada por tres vectores linealmente independientes

b) $\{(1,-2,1),(4,1,-1))\}$

Solución:

No son sistema generador no base, para que formaran un sistema generador debería haber como mínimo tres vectores linealmente independientes. Y para formar base exactamente tres vectores linealmente independientes.

c) $\{(2,-1,0),(4,-1,5),(0,-1,2)\}$

Solución:

$$det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 14$$

Por tanto el rango de la matriz es tres, los tres vectores son linealmente independientes y forman una base

d) $\{(1,0,4),(2,1,-3),(1,1,-7)\}$

Solución:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -7 \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto el rango de la matriz es menor que tres, los tres vectores son linealmente dependientes y no forman una base, tampoco son sistema generador

Ejercicio 6 Dados los siguientes cuatro vectores de $I\!R^4$, encontrar el máximo número de vectores linealmente independientes: $\{(2,0,1,3),(0,2,-1,2),(2,2,0,-1),(1,3,0,-2)\}$

Solución:

$$det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 24$$

Por tanto el rango de la matriz es 4 y los cuatro vectores son linealmente indeoendientes

Ejercicio 7 Sean el siguientes subespacio de $I\!R^3$:

$$S = L\{(2,-1,-1),(3,1,0)\}$$

Calcular la dimensión y ecuaciones cartesianas del subespacio S

Solución:

$$rg\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

La dimensión del subespacio es por tanto 2, y una base está formada por los dos vectores dados

El subespcio está determinado por una única ecuación cartesiana que se obtiene resolviendo

$$det\begin{pmatrix} \mathrm{x} & 2 & 3 \\ \mathrm{y} & -1 & 1 \\ \mathrm{z} & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0;$$

La ecuación cartesiana que define el subespacio es: $x - 3y + 5z = 0$

Ejercicio 8 Calcular la matriz asociada a las siguientes aplicaciones lineales:

a) $f(x,y) = (2x - y, 3y, x)$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $g(x,y,z) = 3x + 2y - z$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $l(x,y,z,t)=(x+y-z,5t,2y+z,0)$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&0&0&5\\0&2&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

d) $h(x,y,z)=(3x+2y-z,6x-y,z-x-y)$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\6&-1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 9 Dada la siguiente aplicación lineal

$$f(x,y,z)=(7x+4y-z,4x+7y-z,-4x-4y+4z)$$

Comprobar cuál de los siguientes vectores son un autovector de la aplicación y averiguar, en caso afirmativo, su autovalor asociado.

a) $(1,0,4)$

Solución:

f(1,0,4) = (3,0,12) Sí son proporcionales $\Rightarrow$ Es autovector asociado al autovalor λ= 3

b) $(1,1,8)$

Solución:

f(1,1,8) = (3,3,3) No son proporcionales $\Rightarrow$ No es autovector

c) $(-2,-2,2)$

Solución:

f(-2,-2,-2) = (-24,-24,-24) = 12(-2,-2,-2) $\Rightarrow$ Es autovector asociado al autovalor λ= 12

d) $(0,-1,6)$

Solución:

f(0,-1,6) = (-10,-13,20) No son proporcionales $\Rightarrow$ No es autovector

Ejercicio 10 Calcular el polinomio característico y los autovalores de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&6\\1&3\end{pmatrix}$$

Solución:

Det(A-λI)= (2-λ)(3-λ)-6= λ^2-5λ= 0; λ= 0 y λ= 5

$$E=\begin{pmatrix}2&4&3\\-2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}$$

Solución:

Det(E-λI)= $det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$= (2-λ)[(3-4λ+ λ^2]= 0; λ= 0 ; λ= 1; y λ= 3

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Det(F-λI)= $det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$= $(1-\lambda)^3$ = 0; λ= 1

Ejercicio 11 De las matrices anteriores indicar cuáles son diagonalizables.

Solución:

En todos los casos todos los autovalores son reales

Si todos los autovectores son distintos la matriz será diagonalizable, por tanto A y E diagonalizables

Para que F sea diagonalizable la dimensión del Subespacio Vectorial asociado a λ= 1 debe ser 3.

Rg(F-1·I) = $rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = 2 ⇒ Dim ($S_{\lambda=1}$)= 3-2= 1 ≠3 ⇒ F No es diagonalizable.

Ejercicio 12 Sea $A=\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que la matriz es diagonalizable

Solución:

Det(A-λI)= (-7-λ)(10-λ)+ 72= λ^2-3λ+ 2= 0; λ= 1 y λ= 2.

Todos los autovalores son reales y distintos ⇒ F diagonalizable.

b) Calcular la matriz diagonal semejante

Solución:

$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) Calcular A^{34} (utilizando la matriz diagonal semejante)

Solución:

$P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$ = A ⇒ A = $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P$ ⇒ A^{34} = $P^{-1}\begin{pmatrix} 1^{34} & 0 \\ 0 & 2^{34} \end{pmatrix}P$

Las columnas de P son un autovector asociado al autovalor 1, y otro asociado al 2.

$S_{\lambda=1}$: $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: -8x -6y = 0; ⇒ (-3, 4) es una base

$S_{\lambda=2}$: $\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: -9x -6y = 0; ⇒ (-2, 3) es una base

$P=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ⇒ $P^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{34} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 13 Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que la matriz es diagonalizable

Solución:

Det(A-λI)= $det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$= (3-λ)[(4-5λ+ λ^2]= 0; λ= 1 ; λ= 3; y λ= 4

Autovalores reales y distintos ⇒ A diagonalizable

b) Calcular la matriz diagonal semejante

Solución:

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) Calcular A^{20} (utilizando la matriz diagonal semejante)

Solución:

$S_{\lambda=1}$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{matrix} 2x - y & = 0 \\ -y + 2z & = 0 \end{matrix}$ ⇒ (1, 2, 1) es una base

$S_{\lambda=3}$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{matrix} -y & = 0 \\ -x - y - z & = 0 \end{matrix}$ ⇒ (1, 0, -1) es una base

$S_{\lambda=4}$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{matrix} -x - y & = 0 \\ -y - z & = 0 \end{matrix}$ ⇒ (1, -1, 1) es una base

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

A^{20} = $P^{-1} D^{20}$ P = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{20} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 14 Sea la siguiente aplicación lineal de $I\!R^3$ a $I\!R^3$

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$$

Calcular:

a) Calcular los autovalores de la aplicación lineal

Solución:

Matriz del aplicación $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Polinomio caracterí stico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) + 2(2-\lambda)$$

Calculando las raí ces del polinomio, obtenemos los autovalores

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) - 2(2-\lambda) &= 0 \\ (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(4-\lambda)+2\right] &= 0 \\ (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo los autovalores son $\lambda = 3, \lambda = 2$ (multiplicidad 2)

b) Calcular una base de cada uno de los subespacios de autovectores asociados a cada autovalor.

Solución:

$$S_{\lambda=2} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{array}{r} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{\lambda=2} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{array}{c} x = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

Base de $S_{\lambda=2}$ = {(1,0,0)}

$$S_{\lambda=3} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

$$S_{\lambda=3} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{array}{r} -x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x,y,z) \,/ \begin{array}{r} x = y \\ z = -2y \end{array} \right\}$$

Base de $S_{\lambda=3}$ = {(1,1,-2)}

c) ¿Es diagonalizable la matriz asociada a la aplicación anterior?

Solución:

No es diagonalizable ya que $\dim(S_{\lambda=2}) + \dim(S_{\lambda=3}) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$